

Estimación de la resistencia al cortante longitudinal en losas compuestas con lámina metálica colaborante

Evaluating longitudinal shear resistance in composite slabs with steel decks

Melchor López Ávila*¹, Rafael Larrúa Quevedo **, Carlos A. Recarey Morfa*

* Universidad Central de Las Villas. CUBA

** Universidad de Camaguey. CUBA

Fecha de recepción: 15/ 12/ 2008

Fecha de aceptación: 25/ 02/ 2009

PAG. 95 - 113

Resumen

Utilizando el método de elementos finitos se reproduce numéricamente el ensayo de tracción que usualmente se verifica en probetas de losas compuestas con lámina colaborante para estimar la resistencia al deslizamiento por cortante longitudinal entre las superficies de la lámina metálica y el bloque de hormigón. Se asume un modelo elasto- plástico para el comportamiento del acero, y modelo de daño plástico para el hormigón. De establecer las bases para la realización de un estudio paramétrico del problema y el desarrollo de un método de estimación analítico del cizallamiento longitudinal.

Palabras Clave: Losas compuestas, modelación numérica, pull out, cizallamiento, elementos finitos

Abstract

Using finite elements method a numerically pull out test is reproduced that usually is performed in composite slabs with steel deck to estimate slip resistance due to longitudinal shear forces between steel deck and concrete block surfaces. Has been assumed an elastic- plastic model to represent steel behavior, and a plastic damage model for concrete. Bases have been establish to perform a parametric study of the problem, an to develop analytic method to calculate longitudinal shear.

Keywords: Composite slabs, numerical modeling, pull out, longitudinal shear, finite elements

1. Introducción

La modelación numérica de losas compuestas ha sido objeto de varias investigaciones (Widjaja, 1997; Veljkovic, 1998; Schuurman, 2000; Edder, 2003; Abdullah, 2004; Ferrer, 2006). De una forma u otra todas intentan simular el efecto de cizallamiento longitudinal entre la superficie portante de la lámina metálica colaborante y el bloque de hormigón. Las modelaciones recientes que mejor describen este comportamiento han sido las efectuadas por Abdullah y Ferrer.

Abdullah emplea el código comercial Abaqus/Explicit y una configuración carente de embuticiones. Modela un nervio de la losa en toda su longitud, con elementos finitos tipo placa para la lámina de acero y elementos sólidos 3D para el bloque de hormigón.

1. Introduction

The numerical composite slab modeling has been object of several investigations (Widjaja, 1997, Veljkovic, 1998, Schuurman, 2000, Edder, 2003, Abdullah, 2004, Ferrer, 2006). In one way or another, all of them try to simulate the effect of longitudinal shear between the carrying surface of the steel sheet and the concrete block. Recent models that can describe better this behavior have been the ones carried out by Abdullah and Ferrer.

Abdullah uses the commercial code Abaqus/Explicit and a configuration with no embossments. It models a nerve of the slab in all its length, with plate-type finite elements for the steel sheet and solid elements 3D for the concrete block.

¹ Autor de correspondencia / Corresponding author:
E-mail: melchor@uclv.edu.cu

La interacción entre las superficies y el aporte de las embuticiones lo simula empleando elementos tipo conectores de rigidez no lineal y conectados nodo a nodo (Abdullah, 2004).

Ferrer (2006) emplea el código comercial Ansys asumiendo un modelo de contacto de fricción rígida de Coulomb, sin adherencia inicial, sin efectos dinámicos y sin tensión tangencial máxima. Para el acero de la lámina metálica colaborante emplea un modelo multilínea elasto-plástico simétrico, y el bloque de hormigón lo simplifica considerándolo como una superficie infinitamente rígida. Aprovecha las simplificaciones que facilita la doble simetría geométrica y de cargas en la probeta del ensayo pull out, así como la simetría longitudinal regida por el patrón cíclico de embuticiones. Modela la lámina con elementos finitos tipo placa con integración reducida, asumiendo el comportamiento de la lámina modelada por su fibra media. La carga aplicada consiste en un desplazamiento longitudinal en la dirección del deslizamiento, impuesto a todos los nodos de cada uno de los bordes transversales de la lámina.

Abdullah toma en consideración el aporte de la geometría de las embuticiones, lo cual conlleva a una aproximación no muy exacta del fenómeno. En los modelos de Ferrer, la condición de carga establecida a partir de inducir un deslizamiento uniforme, no permite evaluar en toda su magnitud las flexiones que pudieran producirse en los bordes de las láminas. También, el simplificar el bloque de hormigón a una superficie infinitamente rígida limita el poder evaluar fenómenos de desgarramiento del hormigón que se han observado en ensayos a probetas de pull-out.

El objetivo de esta investigación es desarrollar un modelo numérico para el código comercial Abaqus/Implicit que aprovecha las simetrías propuestas por Ferrer, pero presenta la novedad que modela el bloque de hormigón utilizando modelo de daño, y en las condiciones de carga reproduce las fuerzas laterales aplicadas en la probeta sobre el hormigón, y la fuerza de tracción la modela uniformemente distribuida sobre la cara del bloque de hormigón transversal a la dirección del deslizamiento. Tanto la lámina metálica como el bloque de hormigón se modelan con elementos finitos sólidos en 3D.

The interaction between the surfaces and the contribution of the embossments is simulated by using elements type connectors of nonlinear rigidity and node to node connection (Abdullah, 2004).

Ferrer (Ferrer, 2006) uses the commercial code Ansys assuming a contact model of rigid friction of Coulomb, without initial bonding, dynamic effects and maximum tangential tension. For the steel of the steel deck he uses a symmetrical multilinear elastic-plastic model, and the concrete block is simplified by considering it as an infinitely rigid surface. He takes advantage of the simplifications that facilitates the double geometric symmetry and the loads in the specimen of the test pull out, as well as the longitudinal symmetry governed by the cyclical pattern of embossments. He models the steel sheet with plate-type finite elements with reduced integration, assuming the behavior of the sheet modeled by its average fiber. The applied load consists of a longitudinal displacement in the direction of the sliding, imposed to all the nodes of each one of the cross-sectional edges of the sheet.

Abdullah considers the contribution taken from the geometry embossments, which entails a not very exact approach of the phenomenon. In the Ferrer models, the load condition established from inducing a uniform sliding, does not allow to evaluate in all its magnitude the bending that could take place in the edges of sheets. Also, simplifying the concrete block to an infinitely rigid surface limits the power to evaluate the pull out of the concrete phenomena that have been observed in tests tubes of pull-out Test.

The objective of this investigation is to develop a numerical model for the commercial code Abaqus/Implicit that takes advantage of the symmetries proposed by Ferrer, but presents the novelty that models the concrete block using damage model, and in the conditions of load it reproduces the lateral forces applied in the specimen on the concrete, and the tensile force is modeled by uniformly distributing it on the cross-sectional face of the concrete block to the direction of the sliding. Both profiled steel sheet and the concrete block are modeled with solid finite elements in 3D.

2. Conceptualización de ensayo pull out

Los ensayos pull-out a especímenes en escala reducida de losas compuestas con lámina metálica colaborante consisten en aplicar una fuerza de tracción para separar el bloque de hormigón y la lámina metálica por deslizamiento longitudinal o la flexión local que este efecto genera. La probeta para el ensayo pull-out consiste en dos nervios de la losa compuesta encarados por la parte de la lámina. Una plancha de acero sirve como elemento de enlace y de rigidización (Figura 1) (Guex and Edder, 2002) (Edder y Crisinel, 2003).

Esta configuración consiste en compensar la tracción superior de la lámina mediante barras roscadas de acero embebidas en el hormigón, que sobresalen por la parte inferior de la probeta y se utilizan como elementos de tracción. Dicha tracción iguala los deslizamientos a ambos lados de la probeta.

3. Descripción general del ensayo experimental de pull out

El conjunto se halla empaquetado por un sistema de barras y resortes cuya finalidad es la de incorporar fuerzas laterales que reproduzcan el efecto del peso propio del hormigón.

Solidarios al bloque de hormigón y mediante barras roscadas embebidas en él se fijan captadores de desplazamiento que miden el deslizamiento relativo entre éste y la lámina de acero (Figura 1).

2. Planning of pull out test

The pull-out tests to specimens in reduced scale of slabs composed with profiled steel sheeting consist of applying a tensile force to separate the concrete block and the steel sheet by longitudinal sliding or by local bending that this effect generates. The specimen for the pull out test consists of two nerves of the composite slab faced by the sheeting. A steel plate serves as and connection element providing stiffness (Figure 1) (Guex and Edder, 2002) (Edder and Crisinel, 2003).

This configuration is based on compensating the superior tensile of the sheet by means of embedded threaded steel bars in the concrete which stick out from the inferior part of the specimen and they are used as tie elements. This tensile force equals the sliding to both sides of the specimen.

3. General description of the experimental pull out test

The set up considers a system of bars and springs which purpose is to incorporate lateral forces that reproduce the effect of the self weight of the concrete.

The sliding between steel sheet and concrete is measured with displacement transducers connected to the concrete block through embedded bars (Figure 1).

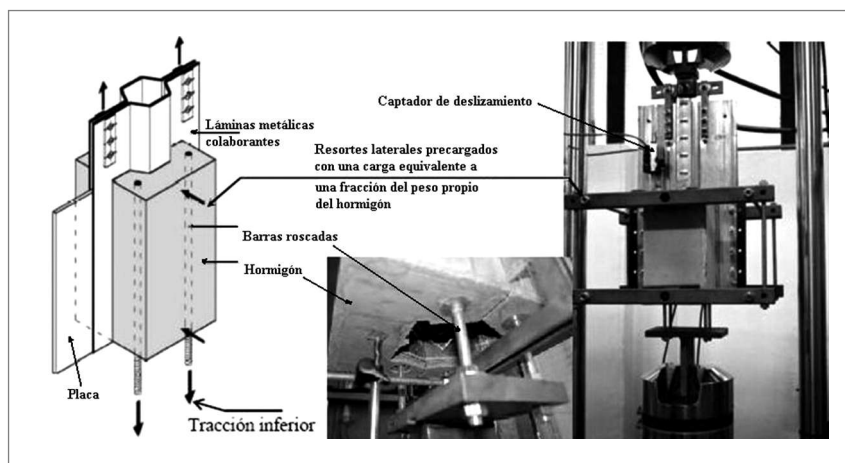


Figura 1. Funcionamiento del ensayo "Pull out"
Figure 1. Working/Functioning of the "Pull out" test

Se mide la fuerza total desarrollada por la máquina de tracción necesaria para lograr el deslizamiento. (Edder, 2003) (Laane y Edder, 2002)

De forma general, la resistencia al cizallamiento longitudinal (τ) se calcula como la ecuación 1:

$$\tau = \frac{F}{2 * l * es} \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (1)$$

Donde:

F : Fuerza de tracción desarrollada por la máquina de ensayo [kN]

l : Longitud de la probeta del ensayo pull out (generalmente 300mm)

es : Distancia entre ejes de simetría transversal [mm]

A partir del estudio experimental pull-out se pueden construir gráficas de fuerza aplicada contra deslizamiento relativo entre la lámina metálica y el bloque de hormigón, los cuales resultan de mucha utilidad para calibrar modelos numéricos (Figura 2).

The total force applied by the tensile machine to produce the sliding is measured (Edder, 2003) (Laane and Edder, 2002).

In general, longitudinal shear resistance (τ) is calculated according the equation 1:

Where:

F : Tensile force developed by the test machine [kN]

l : Specimen length for the pull out (300mm, generally)

es : Distance between axis of cross-sectional symmetry [mm]

From the experimental pull-out study, graphs of applied force versus relative sliding between the steel sheet and the concrete block can be constructed, which turn out to be of much utility to calibrate numerical models (Figure 2).

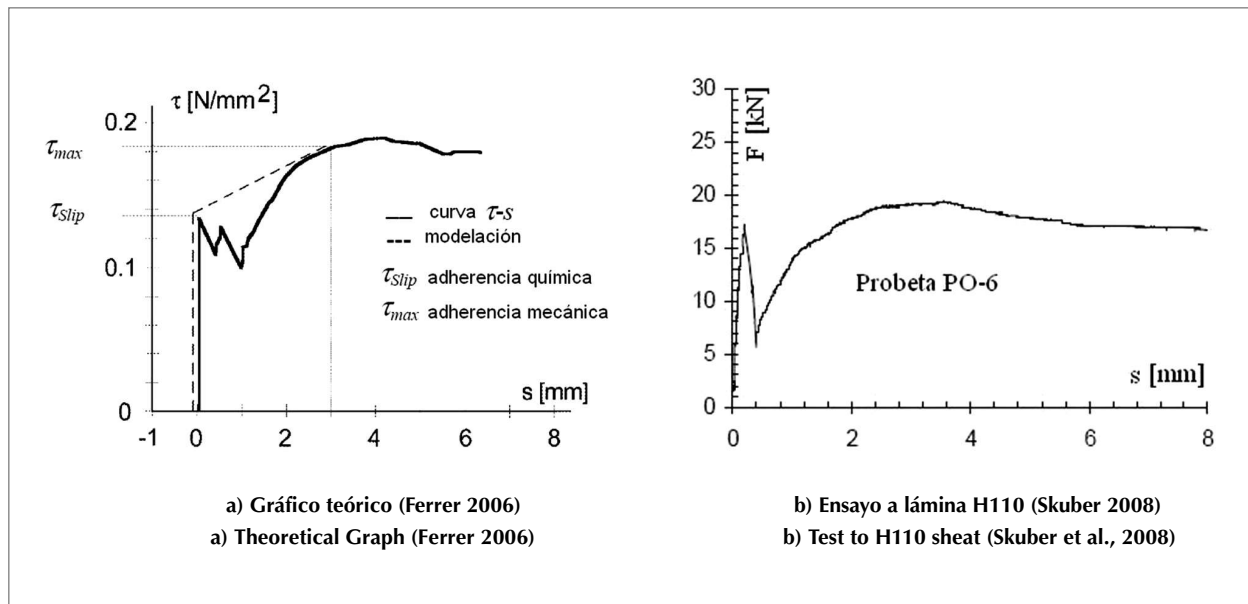


Figura 2. Gráficos fuerza- deslizamiento
Figure 2. Force –sliding graphs

4. Modelación numérica del ensayo pull out

4.1 Aspectos generales

Se analizan dos especímenes prototipo, ambos de láminas de perfilado abierto. Uno es de configuración transversal sencilla de lámina y embuticiones rectas (SK-1) (Skuber, 2007), mientras el segundo considera una configuración transversal algo irregular y embuticiones en forma de cuña (H110) (Skuber et al., 2008).

Ambos estudios experimentales fueron ejecutados en la Universidad de Eslovenia, en 2007 y 2008 respectivamente.

La probeta SK-1 (Skuber, 2007) está formada por láminas de espesor 0.8mm (Figura 3) y bloques de hormigón de 160mm de peralte total, 256mm de ancho y 300mm de longitud. Las láminas tienen un límite elástico de $f_y=354\text{MPa}$, y una tensión de rotura de $f_u=362\text{MPa}$. Al hormigón endurecido a los 28 días de fraguado se le determinaron resistencias promedio de 32.15MPa.

4. Numerical model of the pull out test

4.1 General aspects

Two prototype specimens are analyzed. One is of simple cross-sectional configuration and straight embossments (SK-1) (Skuber, 2007), while the second considers a cross-sectional configuration somewhat irregular and embossments in the form of wedge (H110) (Skuber et al., 2008).

Both experimental studies were executed in the University of Slovenia, 2007 and 2008 respectively.

Specimen SK-1 (Skuber, 2007) is formed by 0.8mm-thick sheets (Figure 3) and 160 x 256 x 300 mm (height x wide x length) concrete blocks. The sheets have a yield strength of $f_y=354\text{MPa}$, and a rupture strength of $f_u=362\text{MPa}$. The average strength of the hardened concrete at 28 days of age was of 32.15 MPa.

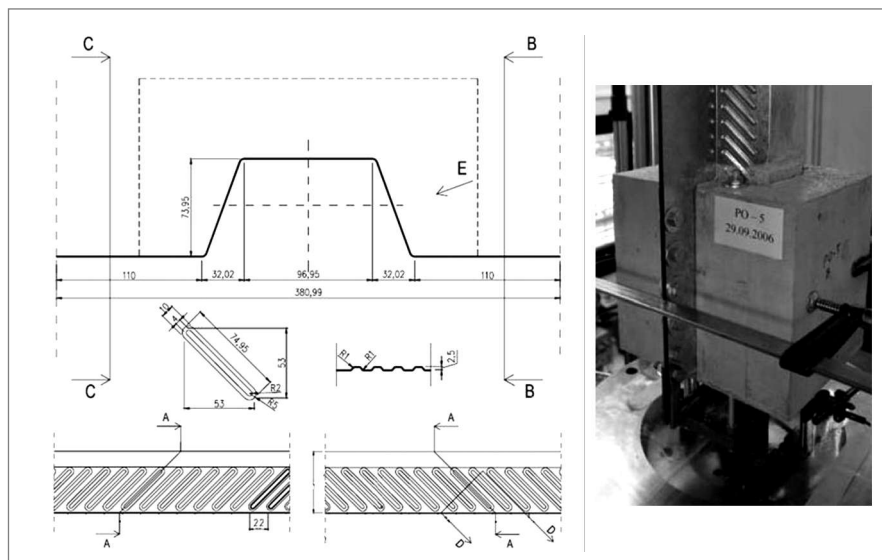


Figura 3. Geometría de la probeta SK-1

Figure 3. Geometry of specimen SK-1

La probeta H110 (Skuber et al., 2008) está formada por láminas de espesor 1.0mm (Figura 4) y bloques de hormigón de 200mm de peralte total, 294mm de ancho y 300mm de longitud. Las láminas tienen un límite elástico de $f_y=320.3\text{MPa}$, y una tensión de rotura de $f_u=367.8\text{MPa}$. Al hormigón endurecido a los 28 días de fraguado se le determinaron resistencias promedio de 33.5MPa.

The H110 specimen (Skuber et al., 2008) is formed by 1.0 mm-thick sheet (Figure 4) and 200 x 294 x 300 mm (height x wide x length) concrete blocks. The sheets have a yield strength of $f_y=320.3\text{MPa}$, and a rupture strength of $f_u=367.8\text{MPa}$. The average strength of the hardened concrete at 28 days of age was of 33.5 MPa.

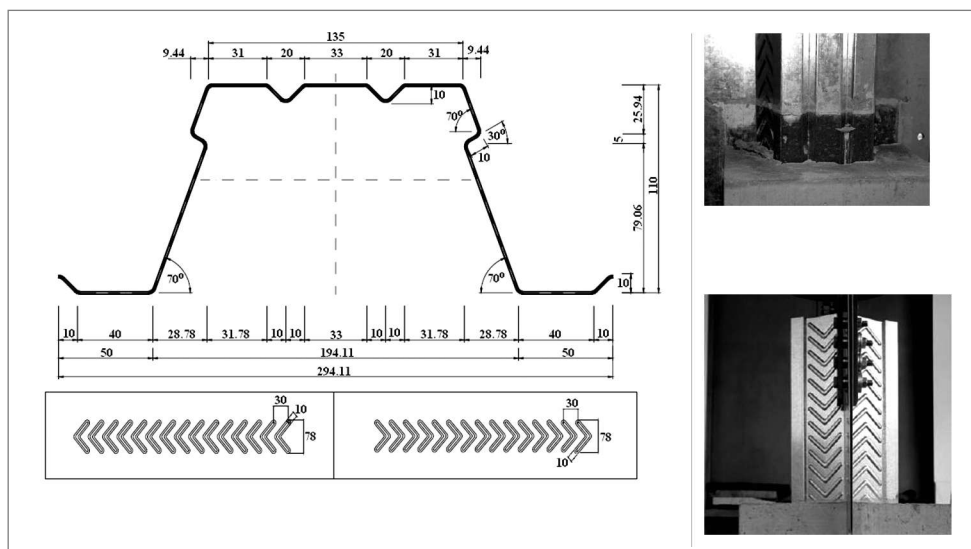


Figura 4. Geometría de la probeta H110
 Figure 4. Geometry of specimen H110

4.2 Modelación geométrica

Para la modelación geométrica de las probetas se han adoptado modelos simplificados aprovechando la simetría de sus geometrías y de la aplicación de las cargas, estando ello generalmente en concordancia con los estudios previos de Ferrer (Ferrer et al., 2007).

Cada una de las partes que componen el modelo han sido modeladas en tres dimensiones, aprovechando las facilidades que brinda ABAQUS/CAE y respetando cada parte o volumen que componen el espécimen (Figura 5).

4.2 Geometric model

For the geometric model of specimens simplified models have been adopted using the advantage of the geometric and loading symmetry o, generally, being in agreement with previous studies by Ferrer (Ferrer et al., 2007).

Each one of the parts that compose the model have been modeled in three dimensions, using the advantages that offers ABAQUS/CAE and respecting each part or volume that compose the specimen (Figure 5).

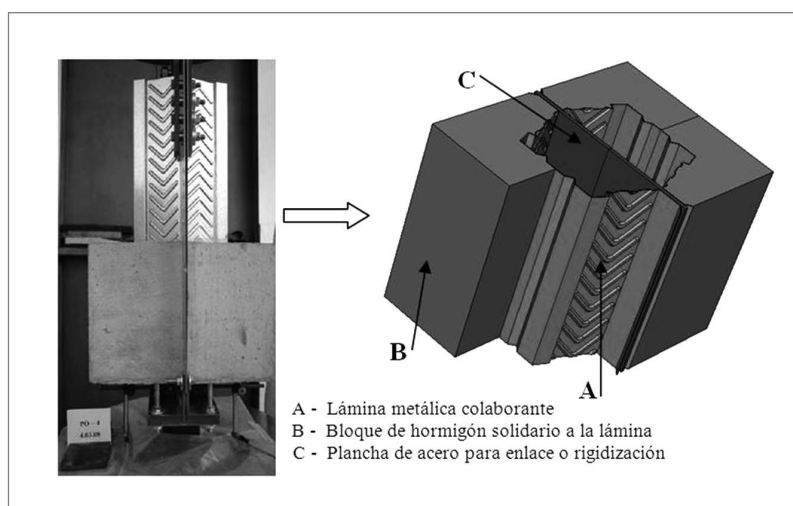


Figura 5. Representación geométrica del ensayo íntegro (H110)
 Figure 5. Geometric representation of the test (H110)

4.3 Modelación de las cargas

Se aplica una presión uniforme de tracción en el extremo superior del bloque de hormigón (Figura 1 y Figura 5), y en toda su área transversal, para simular la tracción uniforme y sin torsión que se aplica a las barras de acero embebidas en el hormigón. A los efectos de análisis de resultados, se multiplica la presión por el área actuante para equiparar la componente de fuerza aplicada. Se modelan las cargas de peso propio, que en los ensayos se garantizan aplicando, con resortes, una precarga de presión transversal al movimiento y en dirección hacia el centro de la probeta, que equivale numéricamente al 10% de la fuerza de tracción última que se aplica en el sentido del movimiento.

4.4 Modelación de los materiales

Para modelar el comportamiento tenso-deformacional del acero se adopta un modelo constitutivo elasto-plástico bilineal. Con esta suposición, empleando criterio de rotura de Von Mises, suelen obtenerse resultados acordes con los estudios experimentales (Ferrer, 2006).

El empleo de modelo de daño plástico (Concrete Damage Plasticity) para la modelación del hormigón, está justificado por una evidente mayor aproximación a la curva real de comportamiento construida a partir de los estudios experimentales. Con el modelo de daño plástico se pueden estudiar los efectos de daño irreversibles asociados a los mecanismos de fallo que pueden darse en los materiales cuando son sometidos a bajos valores de tensiones de confinamiento (Bonilla, 2008).

4.5 Modelación de las condiciones de contacto

Debido al fenómeno principal que se requiere reproducir, que es el deslizamiento relativo entre dos superficies, se opta por modelar la lámina metálica como un sólido. De esta forma se garantiza la posibilidad de mallar de forma idéntica la lámina y el bloque de hormigón en su superficie de contacto, y haciendo coincidir uno a uno los nodos "master" con los nodos "slave" de la superficie vecina, la convergencia numérica se precipita ostensiblemente (Figura 6).

Tomando en consideración las características del fenómeno a modelar, se elige utilizar el algoritmo de "small sliding", ya que para el mismo se asume que el nodo esclavo (slave) se desplazará una distancia acotada a lo largo de cada plano durante el análisis. Este algoritmo resulta superior al "finite sliding" en costo computacional, especialmente en tres dimensiones. (Zienkiewicz y Taylor, 2004).

4.3 Modeling of the loads

A uniform tensile stress in the upper bound of the concrete block is applied (Figure 1 and Figure 5), to simulate the uniform tensile stress (without torsion) that is applied to the steel bars embedded in the concrete. For analyzing results, the applied stress is multiplied by the area to equal the component of the applied force. The self weight loads are modeled, which in the tests are given by prestressing with springs the cross-sectional in direction towards the center of the specimen and perpendicular to the displacement direction that is numerically equivalent to 10% of the last tensile force that is applied in the direction of the displacement.

4.4 Modeling of materials

To model for stress-strain behavior of steel an elastic-plastic bilinear model is adopted. With this assumption, and using the Von Mises failure criterion, the results obtained are often in agreement with the experimental results. (Ferrer, 2006).

The use of the concrete damage plasticity model for modeling concrete, is preferred because is more similar to the real behavior seen in experimental studies. With the concrete damage plasticity model, the effects of irreversible damage associated to failure mechanisms that can occur can be studied under low values of confinement tension. (Bonilla, 2008).

4.5 Modeling of the contact conditions

Because the main phenomenon that is required to be reproduced is the relative sliding between two surfaces, it is chosen to model the steel sheet as a solid. In this way the possibility is guaranteed that meshing of the steel sheet and the concrete block in its contact surface are identical. This allows the coincidence, one by one, of the "masters" nodes with the "slave" nodes of the neighboring surface, which accelerates the numerical convergence (Figure 6).

Considering the characteristics from the phenomenon to model, the use of "small sliding" algorithm is chosen since it assumes the same slave node moves a limited distance throughout each plane during the analysis. This algorithm is superior to "finite sliding" in computer cost, especially in three dimensions. (Zienkiewicz and Taylor, 2004).



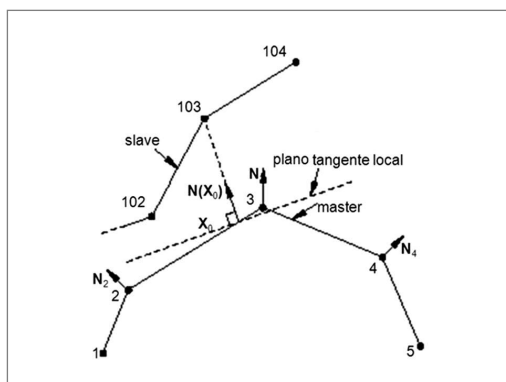


Figura 6. Algoritmo "small sliding"
Figure 6. "small sliding" Algorithm

4.6 Modelación de las condiciones de borde

Se pretenden simular, lo más fidedigno posible, las reales condiciones de borde de acuerdo con el esquema de ensayo pull-out (Figura 1), y las condiciones de continuidad del medio que es necesario imponer al modelo numérico debido las simplificaciones que se efectúan aprovechando la simetría (Figura 7).

La placa intermedia se considera restringida totalmente.

La lámina metálica colaborante (steel deck) se considera empotrada por sus bordes inferiores a la placa intermedia, y los extremos superiores quedan libres de moverse horizontal y verticalmente, excepto en la dirección de la continuidad del medio, determinado por la reducción del modelo debido a la simetría transversal.

El bloque de hormigón se considera que puede moverse libremente, y se restringe exclusivamente en la dirección de la continuidad del medio impuesto por la simplificación por simetría transversal.

4.7 Simplificación del modelo por simetría

Para modelar numéricamente el ensayo pull out se intenta reproducir lo más fielmente posible la geometría de la probeta (Figura 1). Inicialmente dicha probeta se modela sin aplicar simplificación alguna. En una segunda etapa, aprovechando la simetría geométrica y de aplicación de las cargas, así como la existencia de un patrón cíclico de embuticiones en la dirección longitudinal, y a que no se producen flexiones locales apreciables capaces de alterar significativamente los valores de las fuerzas de cizallamiento necesarias para vencer la interacción entre la lámina metálica y el bloque de hormigón (que a los efectos de este trabajo es el fenómeno que interesa caracterizar), se efectúan simplificaciones por doble simetría en el sentido transversal de la probeta,

4.6 Modeling of boundary conditions

The objective is to simulate, as realistic as possible, the edge conditions in agreement with the pull-out test scheme (Figure 1), and the continuity conditions needed to impose to the numerical model because of the simplifications assumed to take advantage of the symmetry (Figure 7).

The intermediate plate is considered as totally restricted (fixed).

The steel deck is considered embedded by its inferior bound to the intermediate plate, and the upper bounds are free to move horizontally and vertically, except in the direction of the continuity of the element, produced by the simplification by cross-sectional symmetry.

It is considered that the concrete block can move freely, and is exclusively restricted in the direction of the continuity of the element by the simplification by cross-sectional symmetry.

4.7 Simplification of the model by symmetry

The numerical model the pull out test needs to reproduced, as realistic as possible, the geometry of the specimen. (Figure 1). Initially, the specimen is modeled without applying any simplification. In a second stage, the model is simplified by taking advantage of the geometric and loading symmetry as well as the patterns location of the embossments in the longitudinal direction. Finally, more simplifications can be obtained by neglecting local bending which does not significantly alter the shear values necessary to damage the bonding between the steel sheet and the concrete block (that for the purposes of this work is the phenomenon that interests to characterize), simplifications by double symmetry in the cross-sectional direction of the specimen,

y por simetría longitudinal gobernada por el patrón cíclico de las embuticiones.

and by longitudinal symmetry governed by the cyclical pattern of embossment, take place.

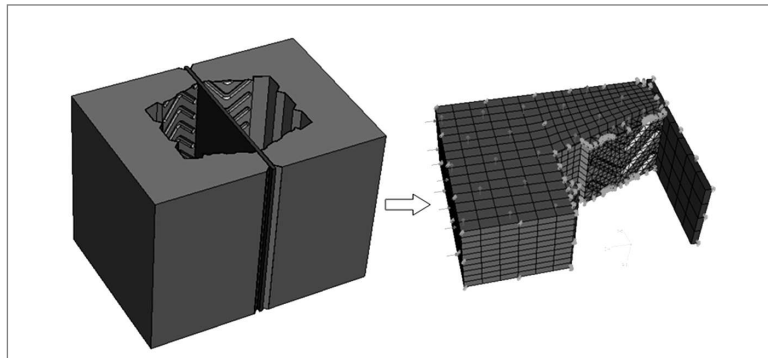


Figura 7. Simplificación geométrica definitiva del modelo numérico (H110)
Figure 7. Definite geometrical simplification of the numerical model (H110)

Para el fenómeno estudiado, el modelo simplificado ofrece resultados numéricos muy similares a los que se obtienen con un modelo sin simplificaciones o con simplificaciones parciales (simplificación transversal simple o doble). De esta forma se puede reducir la cantidad total de ecuaciones necesarias para solucionar el sistema, lo cual significa ahorro apreciable de costo y recursos computacionales.

En todos los casos, el resultado de $F_{m\acute{a}x}$ resultante de la modelación numérica simplificada se debe multiplicar por la magnitud de las simplificaciones realizadas para equipararlo a los estudios experimentales.

For the studied phenomenon, the simplified model offers numerical results very similar to those obtained from a model without simplifications or with partial simplifications (simple or double cross sectional simplification). Thus, the total amount of necessary equations to solve the system can be reduced, which means considerable cost and computer resource savings.

In all cases, the result of resulting $F_{m\acute{a}x}$ of the simplified numerical modeling must be corrected considering the magnitude of the simplifications in order to compare it to the experimental studies.

5. Calibración y validación del modelo

5.1 Estudio de selección del tipo de elemento finito

La discretización o formación de una malla con elementos finitos está condicionada por dos factores íntimamente relacionados: la exactitud de la solución y el coste computacional para la misma; por tanto se debe seleccionar el elemento finito que a través de sus funciones de aproximación brinde una solución razonable en el equilibrio entre precisión y velocidad de convergencia (Fornóns, 1982).

ABAQUS cuenta en su biblioteca con tres tipos de elementos tridimensionales: de 8, 6 y 4 nodos. De ser posible utilizarlo, el elemento de 8 nodos o hexaedro, con integración de primer orden, resulta generalmente el más idóneo, ya que suele converger con más rapidez y precisión que los otros dos mencionados. El elemento 3D de 4 nodos, o tetraedro, tiene la ventaja indiscutible de poder adaptarse a cualquier geometría, no importa lo irregular que esta sea.

5. Calibration and validation of the model

5.1 Selection study of the type of finite element

The formation of a mesh with finite elements is conditioned by two intimately related factors: the exactitude of the solution and the computer cost for the solution; therefore the finite element should be selected in such a way that, through its functions of approach, offers a reasonable solution in the balance between precision and convergence speed (Fornóns, 1982).

ABAQUS has in its library three types of three-dimensional elements: of 8, 6 and 4 nodes. From being possible to use it, the element of 8 nodes or hexahedron, with integration of first order, it is generally the most suitable, since usually converges more rapidly and with more precision than the other two elements mentioned above. The 3D-element of 4 nodes, or tetrahedron, has the unquestionable advantage of being able to adapt to any geometry no matter how irregular it might be.

(Zienkiewicz y Taylor, 2004) El empleo de elementos tipo shell para la lámina fue desechado por los problemas que surgen al intentar evaluar los fenómenos de deslizamiento entre dos superficies irregulares, como se explica en el punto 4.5.

(Zienkiewicz and Taylor, 2004). The use of shell type elements for the sheet was rejected by the problems that arise when trying to evaluate the sliding between two irregular surfaces, as it is explained in point 4.5.

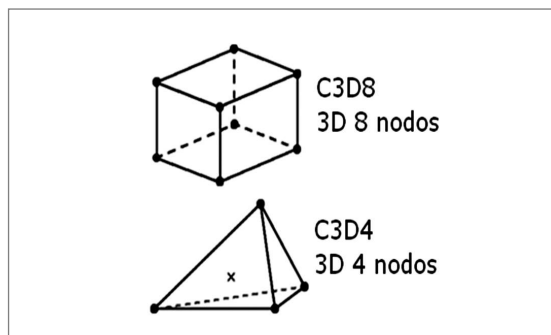


Figura 8. Elementos finitos de 3 y 4 nodos
Figura 8. Three and Four node finite elements

De aquí que el estudio de selección de malla en este modelo se reduzca a comparar los resultados que devuelven distintas densidades de malla, utilizando elementos C3D4 en las regiones próximas a las embuticiones y a las zonas de contacto, ya que esas son áreas de geometría muy irregular, y es mayor el gradiente de tensiones. Las restantes regiones, alejadas del área de las superficies en contacto, por ser además regiones con geometría regular, es recomendable mallarlas con elementos tipo C3D8 para reducir el número de ecuaciones a resolver.

Se establece la comparación solamente entre elementos del primer orden de integración debido a que las primeras aproximaciones numéricas con este tipo de elementos han ofrecido soluciones bastante exactas a los efectos de esta investigación, por lo cual se considera que no resulta racional sacrificar recursos computacionales empleando elementos con un mayor orden de integración (Oñate, 1995). Los tiempos de cómputo se estiman tomando como base un procesador Pentium IV de 3GHz de velocidad y 512MB de memoria RAM.

En la Tabla 1 se muestra el resultado comparativo de las variables de respuesta a partir de las soluciones numéricas y experimentales. Para esto se ha tomado como referencia el punto (deslizamiento vs carga última) obtenido a partir del ensayo pull out y los valores de carga alcanzados utilizando diferentes configuraciones de elementos.

Hence, the mesh selection study in this model is reduced to the comparison of the results that different mesh densities provide, using C3D4-type elements in the regions next to the areas of irregular geometry such as embossment and contact zones where and the stress gradient is greater. The C3D8-type elements are recommendable in the rest of the more regular areas to reduce the number of equations to solve.

Only first order integration elements are used in this study to compare results because the first numerical approaches with this type of elements have offered quite exact solutions for the purposes of this investigation; thus, it is considered irrational to sacrifice computer resources using elements with a greater order of integration (Oñate, 1995). A Pentium IV processor of 3GHz and 512MB in RAM was used to calculate the solving times.

In Table 1 the comparative results of the numerical and experimental solutions are shown. For doing this the (sliding versus ultimate load) obtained from the pull out test and the maximum load values has been taken as reference using the configurations of different elements.

Tabla 1. Resultados de la simulación numérica empleando distintos tipos de elementos finitos (SK-1)
 Table 1. Numerical simulation results using different types of finite elements (SK-1)

No.	Tipo de elemento en región de:	Carga última	Error	Error medio	Tiempo de	
	transición	embuticiones	MEF (kN)	absoluto	absoluto	cómputo (hrs)
1	C3D8	C3D4	13.90	2.46	4.19	0.67
2	C3D8R	C3D4	13.81	3.09	3.64	1.00
3	C3D8	C3D4H	13.90	2.46	4.41	1.83
4	C3D8R	C3D4H	13.85	2.81	3.55	2.42
5	C3D8I	C3D4H	12.66	11.16	5.45	2.67
6	C3D8H	C3D4H	13.79	3.23	4.51	5.17
7	C3D8HI	C3D4H	12.70	10.88	5.19	13.00
E	Experimental		14.25			

R: integración reducida H: integración híbrida I: modos incompletos
 R: reduced integration H: hybrid integration I: incomplete modes

El porcentaje de error medio absoluto se calcula como numerar ecuaciones (2):

The absolute mean error percentage is calculated according to equation (2):

$$e_{ma} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{Q_{e(i)} - Q_{n(i)}}{Q_{e(i)}} \right)}{n_p} \quad (2)$$

Donde: $Q_{e(i)}$ es la i-ésima carga del estudio experimental, y $Q_{n(i)}$ es la i-ésima carga obtenida en el modelo numérico para un mismo deslizamiento, y n_p es la cantidad de puntos de evaluación i (Bonilla, 2008).

Where: $Q_{e(i)}$ is the i th load of the load of the experimental study, and $Q_{n(i)}$ is the i th load obtained from the numerical model for an equal sliding, and n_p is the amount of evaluation points in i (Bonilla, 2008).

Del análisis de los resultados de la Tabla 1 y la Figura 9 se infiere que los elementos finitos de los 4 primeros ítems favorecen soluciones bastante precisas comparadas con los resultados experimentales, e incluso el error medio absoluto de dispersión del propio estudio experimental (5.90), es más alto que en cualquiera de las modelaciones numéricas.

From the analysis of the results of Table 1 and Figure 9 it is concluded that the finite elements of the 4 first items provide quite precise solutions compared with the experimental results, and even the dispersion of the absolute mean error from the self experimental study (5.90), is higher than in any of the numerical modelings.

Restaría entonces seleccionar el tipo de elemento finito a partir de evaluar su coste computacional. De aquí que las variantes 1 y 2 (Tabla 1) resulten las mejores soluciones, que son precisamente los que están mallados con elementos C3D4 en la zona de embuticiones; y entre ambos resulta ligeramente superior el ítem No. 1, cuya zona de transición está mallada con elementos finitos tipo C3D8.

Therefore, it remains to select the type of finite element based on the computer cost estimate for each element. Based on that, items no. 1 and no. 2 (Table 1) are the best solutions; both are indeed the variants meshed with C3D4 elements in the embossment zone. Between items no. 1 and no. 2, item no. 1 is slightly superior because it transition zone is meshed with reduced integration C3D8 type finite elements.

De aquí se deduce que utilizando elementos finitos lagrangeanos con fórmulas de interpolación simple, se obtiene un resultado numérico en correspondencia con los estudios experimentales del fenómeno, y con un costo computacional muy inferior al requerido por otras formulaciones. (López et al., 2007)

It is concluded that using lagrangian finite elements with simple interpolation formulas allows obtaining numerical result in correspondence with the experimental studies, and with a computer cost far below to the required one by other formulations (Lopez et al., 2007).

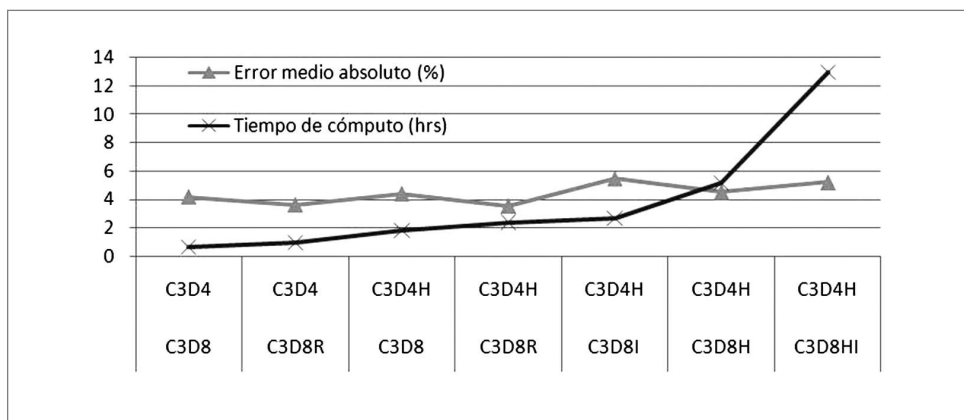


Figura 9. Comparación de resultados de la simulación numérica empleando distintos tipos de elementos finitos (SK-1)
 Figure 9. Comparison of numerical simulation results using different type of finite elements (SK-1)

5.2 Estudio de densidad de malla

Al igual que para el tipo de elemento finito, se debe seleccionar la densidad de malla buscando equilibrio entre precisión y costo computacional. Es obvio que mientras más denso sea el mallado, la respuesta numérica deberá ser más precisa. Sin embargo, cuando para una densidad de malla relativamente grosera se obtienen respuestas satisfactorias, puede resultar ilógico densificar más el mallado a expensas del incremento cuadrático de tiempo de costo computacional que esto provoca (Bonilla, 2008). Una solución racional es particularizar la densificación de la malla en las zonas de estudio y donde se espera mayor gradiente de concentración o variación de tensiones. (Recarey, 1999) En el caso del modelo de ensayo pull- out, estas zonas se encuentran en las embuticiones y sus proximidades. (Ferrer et al., 2005)

Se analizan 5 densidades de malla para cada uno de los tipos de elementos seleccionados previamente (Tabla 1). En la gráfica de la Figura 10 se ilustra el comportamiento de la combinación de tipos de elementos que finalmente se selecciona: C3D8 + C3D4.

En la Tabla 2 se puede evaluar que la respuesta del mallado $s=0.0090m$ es equiparable a las respuestas que ofrecen mallados más densos, por lo cual se puede aceptar que para esa densidad de malla, la respuesta numérica y el costo computacional resultan razonables y acordes con el alcance de la investigación.

5.2 Mesh density study

As for the type of finite element, mesh density should be selected looking for balance between precision and computer cost. It is obvious that the numerical answer have to be more precise when using a denser mesh. Nevertheless, satisfactory answers can be obtain when a relatively crude mesh density is used, so it can be illogical to densify mesh at the expense of the quadratic increase of time of computer cost in this cases (Bonilla, 2008). A rational solution is to differentiate densification of the mesh depending of the zones of study especially where large a concentration gradient or variation on stress is expected (Recarey, 1999). In the case of the pull out test model, these zones are found in the embossment and their proximities. (Ferrer et al., 2005)

For each one of the types of finite elements previously selected in Table 1, five mesh densities are analyzed. Figure 10 shows the behavior of the selected combination of elements: C3D8 + C3D4.

In Table 2 it is possible to evaluate that the answer obtained using a mesh $s=0.0090m$ is comparable to the those obtained using denser meshes; thus, it can be accepted that for that mesh density, the numerical answer and the computer cost are reasonable and in agreement with the scope of this investigation.

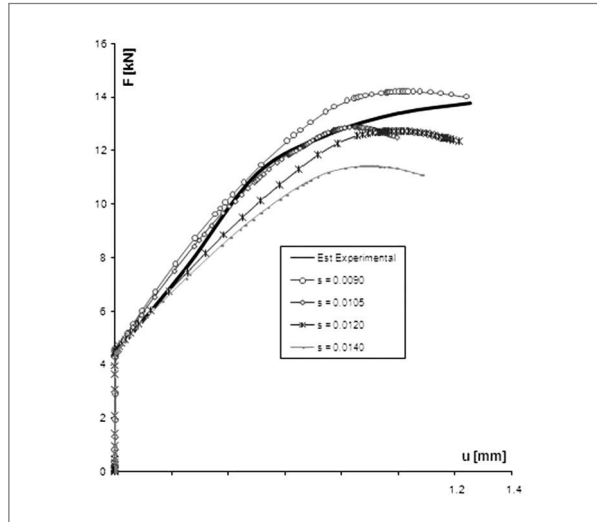
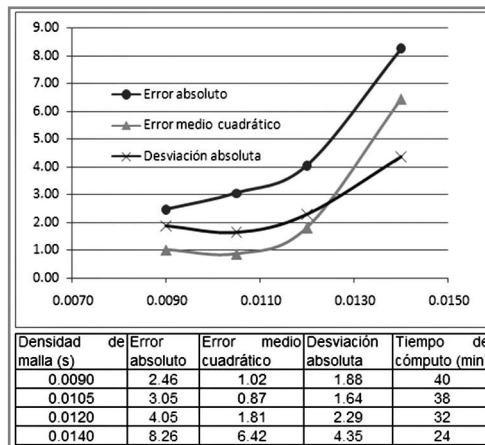


Figura 10. Gráficos fuerza desplazamiento (SK-1)
Figure 10. Load-Sliding Graph (SK-1)

Tabla 2. Análisis de error vs. densidad de mallas para la probeta SK-1
Table 2. Analysis of error v/s mesh density for the specimen SK-1



Error absoluto:

Absolute Error:

$$e_i = \left| Q_{e(i)} - Q_{n(i)} \right| \quad (3)$$

Error medio cuadrático:

Quadratic mean error:

$$e_{mc} = \frac{\sum_{i=1}^n (Q_{e(i)} - Q_{n(i)})^2}{n_p} \quad (4)$$

Desviación absoluta media:

Absolute mean deviation:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n \left| Q_{e(i)} - Q_{n(i)} \right|}{n_p} \quad (5)$$

5.3 Calibración de los modelos constitutivos

Se entiende por calibración de un modelo constitutivo la determinación de los parámetros de los materiales tomando como base resultados experimentales obtenidos previamente (McCarthy et al., 2005).

Se retoma el modelo de probeta SK-1 y se le modela en los límites superior e inferior que pueden llegar a alcanzar las variables asociadas a los materiales a causa de su variabilidad estadística permisible. Este análisis se efectúa a tres parámetros: elasticidad del acero, coeficiente de Poisson del acero y la rugosidad entre la lámina metálica y el bloque de hormigón (Figura 11).

El intervalo de variación permisible de varios parámetros que caracterizan los materiales de construcción (elasticidad del acero y coeficiente de Poisson) han sido previamente analizados y normados (Agostoni et al., 1994). Por su parte, la rugosidad entre la lámina metálica y la losa de hormigón es una variable muy difícil de controlar y extremadamente variable. Varios autores referencian que la rugosidad puede oscilar entre 15 y 60% (Crisinel et al., 2006). Para el análisis de estos modelos numéricos se considera una variación de apenas 5 puntos porcentuales de variación con respecto al valor central (de 25 a 35%), lo cual resulta extremadamente reservado.

En la Figura 11 es notable que la curva experimental quede completamente contenida entre las curvas que representan los casos con variabilidad límite, al igual que la curva con los datos estándares o de valor central, por lo cual se puede asumir que la modelación numérica está en concordancia con los resultados experimentales.

5.3 Calibration of the constituent models

The calibration of a constituent model is the determination of the parameters of the materials taking as it bases experimental results previously obtained (McCarthy et al., 2005).

The model of specimen SK-1 is revisited and it is modeled considering the the upper and lowest bounds that the variables associated to the materials can reach due to the material variability. This analysis focuses on three parameters: modulus of elasticity of the steel, Poisson ratio of the steel and the roughness between the steel sheet and the concrete block (Figure 11).

The allowable variation interval of the modulus of elasticity and Poisson ratio of the steel have been previously analyzed and regulated (Agostoni et al., 1994). On the other hand, the roughness between the steel sheet and the concrete is a parameter very difficult to control and extremely variable. Several authors refer that the roughness can have an variation between 15 and 60% (Crisinel et al., 2006). For the analysis of these numerical models a variation of only 5% from the central value (from 25 to 35), is considered which is very low.

It is worth to notice from Figure 11 that the experimental curve is bounded by the curves that represent the cases with extreme variability, as occurs with the curve with the central values; therefore, it can be assumed that the numerical model is in agreement with the experimental results.

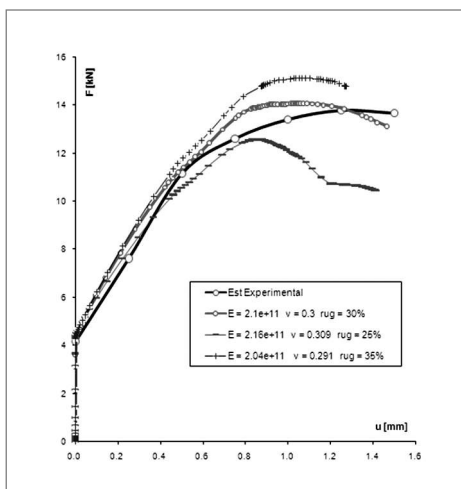


Figura 11. Calibración física SK-1

Figure 11. Calibration curve SK-1

5.5 Comprobación de la modelación numérica

Para verificar que las condiciones pre-establecidas en el proceso de calibración matemática y física para la modelación numérica de la probeta pull-out con lámina SK-1 pueden extrapolarse a otros tipos de probetas pull-out con características distintas, se procede a reproducir fielmente todas las condiciones aplicadas al primer modelo numérico en una probeta prototipo H110 (Figura 4), que es de configuración transversal irregular y con embuticiones en forma de cuña.

En la Figura 12 se puede apreciar que el gráfico Fuerza Vs Desplazamiento que arroja como resultado dicha modelación numérica resulta una aproximación bastante cercana a la curva obtenida de su modelo experimental.

Es necesario destacar que el estudio experimental de esa probeta arroja, para tres réplicas, un error medio absoluto de 8.42%, y en contraste el modelo numérico experimentó un error medio absoluto de 6.34% con respecto al valor central de los ensayos, por lo cual la modelación queda por dentro de la banda de error variacional de los propios ensayos experimentales.

5.5 Proving of the numerical model

To verify that the pre-established conditions in the mathematical and physical calibration for the numerical model of pull out specimen with SK-1 steel sheet, can be extrapolated to other pull out specimens with different characteristics, all the conditions applied to the first numerical model are carefully applied to a the prototype H110 specimen (Figure 4). Such specimen has irregular cross sectional configuration and wedge-shaped embossments.

From the Force-Sliding graph in Figure 12, it can be observed that the numerical model applied to the new specimen type gives results that are quite close to the those obtained from experimental results.

It is worth to notice that the experimental study of that specimen (which considers three repetitions per experimental value) gives an absolute mean error of 8.42% which contrasts with the numerical model that gives an absolute mean error of 6.34%; therefore, the model stays within the variation range of the experimental tests.

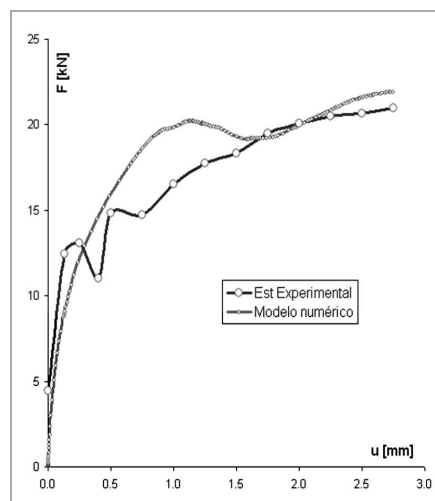


Figura 12. Gráfico Fuerza Vs Desplazamiento. Lámina H110

Figure 12. Load-Sliding Graph (H110)

6. Aplicaciones al estudio del comportamiento del ensayo pull out

6.1 Estudio de la influencia entre cortante longitudinal y longitud de la probeta

Para proceder al estudio del efecto de simplificación en el plano longitudinal se aprovecha la

6. Applications to the study of the pull out test behavior

6.1 Study of the influence between longitudinal shear and specimen length

To proceed to study the simplification effect in the longitudinal plane, the embossment

repetición cíclica del patrón de embuticiones y se establece como longitud mínima necesaria a considerar las dimensiones que este patrón establece.

A partir de los resultados de los modelos numéricos se demuestra que esta simplificación longitudinal resulta admirablemente exacta, con un coeficiente de correlación de 0.9991, indicando el mapa de tensiones que, debido a las flexiones locales de la lámina, la zona central deja relativamente de aportar en la adherencia longitudinal, pero para los efectos de la longitud normada de los ensayos pull-out, que es apenas 300mm, este efecto resulta insignificante, por lo cual puede ser perfectamente aceptable la simplificación en el plano longitudinal (Figura 13).

pattern is used, and the minimum necessary length is established based on the same pattern.

From the results of the numerical models, it is proven that this longitudinal simplification is unquestionably exact, with a correlation coefficient of 0.9991. The resulting stress maps indicate that, due to the local bending of the sheet, the central zone of the sheet reduces its relative contribution in the longitudinal bonding. Nevertheless, for the effects of the length of the pull out tests, which is hardly 300mm, this effect is insignificant, so the simplification in the longitudinal plane can be perfectly accepted. (Figure 13).

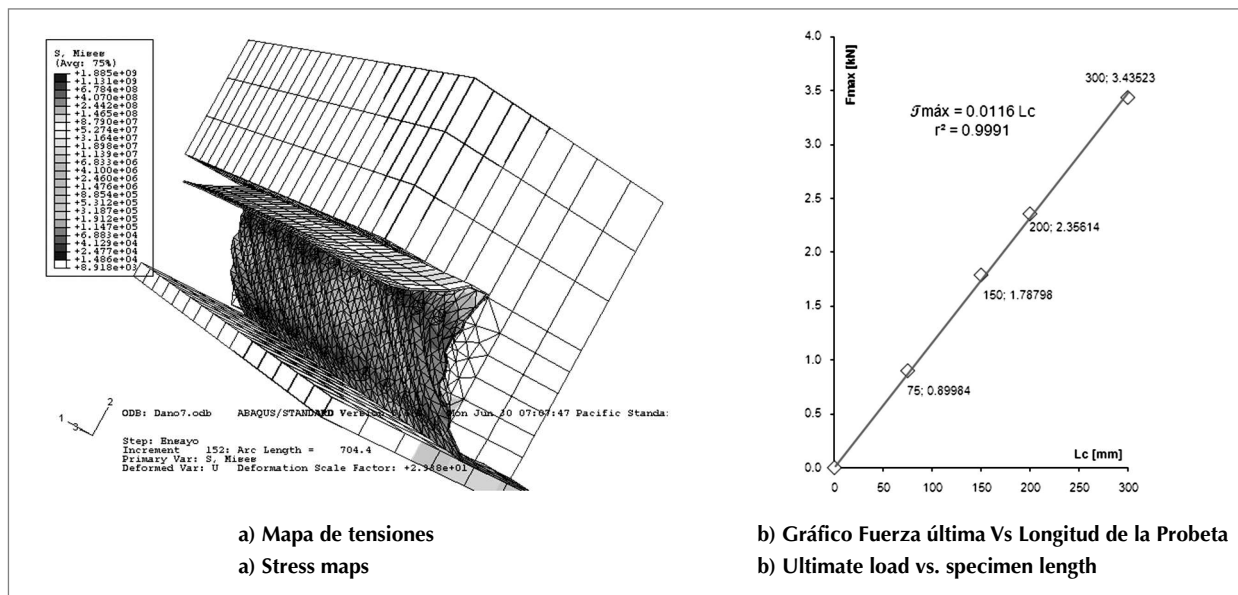


Figura 13. Modelo numérico con una simplificación transversal (SK-1)
Figure 13. Numerical model with a cross sectional simplification (SK-1)

6.2 Modelación definitiva del ensayo

La modelación definitiva de la geometría admite simplificaciones por doble simetría transversal y simetría longitudinal, según se representa en la Figura 7. La longitud del tramo longitudinal es equivalente a dos veces la longitud del patrón de embuticiones.

Tanto el bloque de hormigón como la lámina metálica se modelan con elementos finitos tridimensionales. Para mallar ambas partes se utilizan elementos C3D4 en las zonas de embuticiones, y elementos C3D8 para el resto de las zonas.

En las zonas de mayor concentración de tensiones, que coinciden con las embuticiones, se emplea una densidad de malla $s=0.0090m$.

6.2 Definitive modeling of the test

The final modeling of the geometry allows for simplifications by double cross sectional symmetry and longitudinal symmetry, as is represented in Figure 7. The length of the longitudinal section is equivalent to twice the length of embossments pattern.

Both the concrete block as the steel sheet are modeled with tridimensional finite elements. To mesh both sections, C3D4 elements are used in the embossment zones, and C3D8 elements for the remaining zones.

In the zones of large stress concentrations, which coincide with the embossments, a mesh density= $0.0090m$ is used.

Los materiales se modelan utilizando el valor central (estándar) de cada uno de sus parámetros físicos.

La validez de la modelación numérica efectuada se pone de manifiesto al realizar el estudio cuantitativo entre los valores de fuerzas de cizallamiento longitudinal obtenidos de la simulación experimental, y los modelos de elementos finitos; así como la similitud cualitativa con relación al mapa de tensiones y deformadas (Figura 14).

The materials are modeled using the central value (standard) of each one of its physical parameters.

The validity of the numerical modeling is demonstrated when quantitatively comparing the values of longitudinal shear stresses from the experimental results and the finite element models which show similarity in deformed stress maps (Figure 14).

7. Conclusiones

De los elementos finitos que se pueden utilizar para discretizar volúmenes y que se encuentran disponibles en ABAQUS, el que mejor describe el comportamiento del ensayo pull out para cuantificar las fuerzas de cizallamiento longitudinal entre la lámina y el hormigón es el C3D4 para la superficie de contacto y el C3D8 para los volúmenes restantes (Figura 14).

7. Conclusions

Among the finite elements available in ABAQUS for meshing volumes, the one that better describes the behavior of the pull out test in quantifying longitudinal shear stresses between the steel sheet and the concrete are the C3D4 for the contact surface and the C3D8 for the remaining volumes (Figure 14).

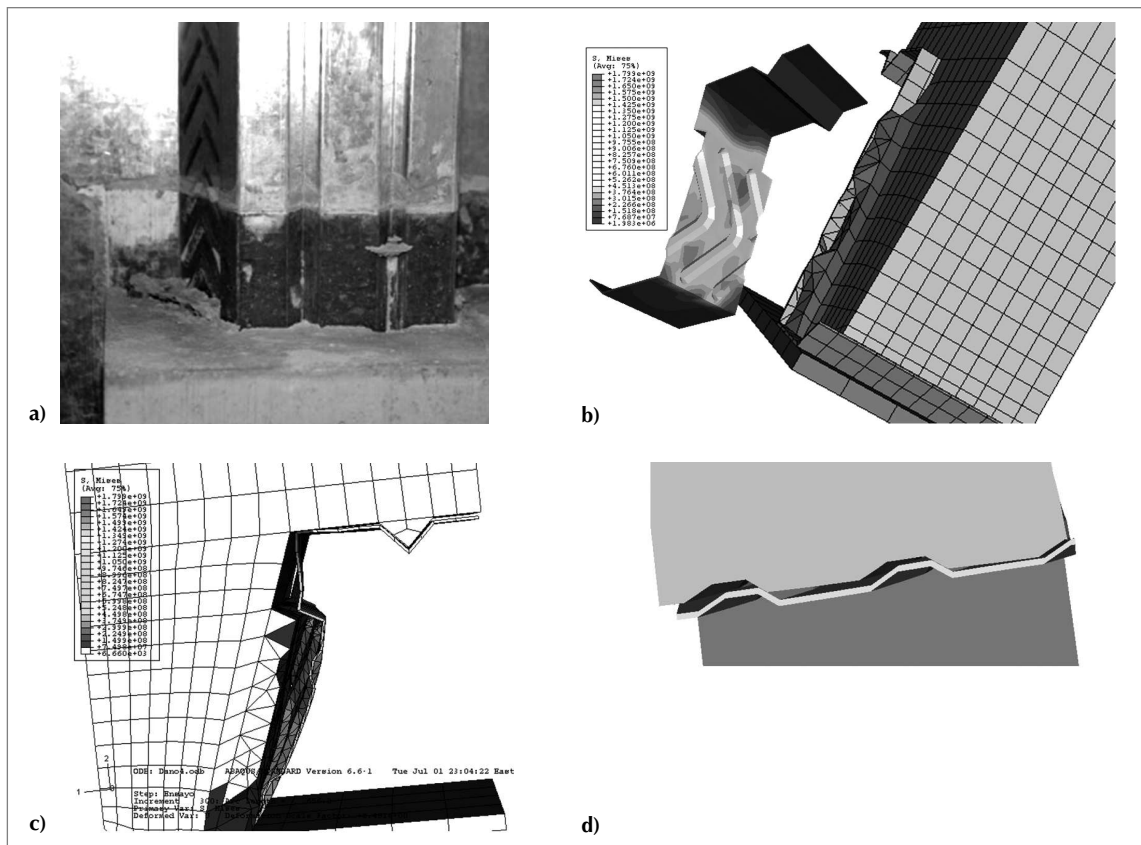


Figura 14. Comparación visual de los resultados experimentales con las modelaciones. a) Probeta experimental H110 después de aplicada la tracción. b) Modelo numérico (Notar similitud del abofamiento del hormigón al igual que en la probeta experimental). c) Vista frontal del modelo numérico (Notar deformación de la lámina). d) Separación de la lámina del bloque de hormigón y tensiones en la lámina

Figure 14. Visual comparison of the experimental results with the modeling. a) Specimen H110 after tensile application swelling as the same as in the specimen c) Frontal view of numerical model (notice the deformity in the steel sheet) d) Pull out of the steel sheet from the concrete block and tensions in the steel sheet

Tomando en consideración la similitud entre los resultados numéricos y experimentales, se puede concluir que las hipótesis adoptadas en el modelo numérico son acertadas, lo que da la posibilidad de que el fenómeno físico del problema pueda ser reproducido y, en particular, el deslizamiento longitudinal.

Tanto para la lámina H110 como para la SK-1 se cumplen los postulados e hipótesis planteados por los principales investigadores acerca del comportamiento físico y tensional de las estructuras compuestas con lámina metálica colaborante

La introducción de un modelo de daño plástico para el hormigón permite reproducir el comportamiento del bloque de hormigón en contacto con la lámina metálica, así como el posible desgarramiento de este en el extremo posterior al deslizamiento (Figura 14b).

En las embuticiones de las láminas metálicas, las zonas de tensiones principales se localizan en los extremos de estas, y en las paredes frontales con respecto a la dirección del deslizamiento longitudinal (Figura 14b).

Se confirma la complementariedad entre la simulación numérica y la experimentación, pues por una parte los ensayos reales permiten calibrar y validar los modelos a partir de sus respuestas físicas y cuantitativas, mientras que la simulación virtual permite visualizar fenómenos tensionales y deformacionales que no pueden ser cuantificados adecuadamente con los métodos experimentales (Figura 14).

Con la utilización de modelo de daño plástico para el hormigón se puede modelar el fenómeno de deslizamiento entre una lámina metálica colaborante y su bloque de hormigón de forma más fidedigna a modelaciones anteriormente realizadas por otros investigadores, ya que se toma en cuenta la capacidad a cortante del bloque de hormigón en contacto con las embuticiones de la lámina.

Considering the similarity between the numerical and experimental results, it can be concluded that the hypotheses adopted in the numerical model are correct, which gives the possibility that the physical phenomenon of the problem can be reproduced and, in particular, the longitudinal sliding.

The postulates and hypothesis raised by the investigators about the physical and stress related behavior of concrete with steel decking are fulfilled for the H110 and SK-1 steel sheet.

The introduction of a concrete damage plasticity model for the concrete allows reproducing the behavior of the concrete block in contact with the steel sheet, as well as the possible pull out of concrete at the sliding end (Figure 14b).

The principal stresses at the embossments of the steel sheet, are located at their end, and in the frontal sides with respect to the direction of the longitudinal sliding (Figure 14b).

The complementariness between the numerical simulation and the experimental studies is confirmed, because of actual tests allow calibrating and validating the models, whereas the virtual simulation allows visualizing stresses and strains which cannot be properly quantified with the experimental methods (Figure 14).

With the use of the concrete damage plasticity model for concrete, the sliding phenomenon between steel sheet and concrete block can be modeled in a more reliable manner, since the shear capacity of the concrete block in contact with the embossments of the steel sheet is taken into account.

8. Referencias / References

- Abdullah R. (2004), *Experimental Evaluation and Analytical Modeling of Shear Bond in Composite Slabs*. Doctoral Thesis. Virginia Technology Institute. EE.UU. Tutor: Easterling, W.S.
- Agostoni N., Ballio G. y Poggi C. (1994), *Statistical Analysis of the Mechanical Properties of Structural Steel*. Costruzioni Metalliche, 31-39p. Italy
- Bonilla, J. D. (2008), *Estudio del comportamiento de conectores tipo perno de estructuras compuestas de hormigón y acero mediante modelación numérica*. Tesis Doctoral. Santa Clara, Cuba, UCLV. Tutores: Larrúa, R., Recarey, C.
- Crisinel M., Ferrer M. y Rossich M. (2006), *Influence of Sheet Surface Conditions and Concrete Strength on the Longitudinal Shear Resistance of Composite Slabs*. Switzerland

- Edder P. (2003), Essais Pull-Out Interlaboratoires. IN ICOM (Ed.) ICOM 464. Lausanne, Switzerland, Laboratoire de la construction métallique (ICOM). EPFL.
- Edder P., Crisinel M. (2003), Nouvelle approche pour le dimensionnement des dalles mixtes. ICOM 472. Lausanne, Switzerland. Laboratoire de la construction métallique (ICOM): 39p
- Ferrer M. (2006), Estudio numérico y experimental de la interacción entre la chapa de acero y el hormigón para la mejora resistente de las losas. Tesis Doctoral. Barcelona, España, UPC. Tutor: Marimon, F.
- Ferrer M., Marimón F. y Crisine, M. (2007), Designing cold-formed steel sheets for composite slabs: An experimentally validated FEM approach to slip failure mechanics. Elsevier Ltd, 44, 11.
- Ferrer M., Marimon F., Roure F. y Crisinel M. (2005), Optimised Steel Sheet Profile for Composite Slabs: a design optimisation procedure using 3D non-linear finite elements. Eurosteel2005. 4th European Conference on Steel and Composite Structures. Europe, vol. B, sec4.5, Maastricht (NL).
- Fornons, J.M.G. (1982), El método de los elementos finitos en la ingeniería de estructuras. Ed. Universidad Politécnica de Barcelona. España. 284p
- Gueux F. y Edder P. (2002), Mode opératoire pour les essais de cisaillement tôle-béton de type Pull-Out. IN ICOM (Ed.) ICOM 453. Lausanne, Switzerland, Laboratoire de la construction métallique (ICOM).
- Laane A. y Edder P. (2002), Pull-Out tests on steel-concrete composite slab small-scale specimen. IN ICOM (Ed.) ICOM 451. Lausanne, Switzerland, Laboratoire de la construction métallique (ICOM).
- López M., Larrúa R. y Recarey C. (2007), Un nuevo sistema de diseño de embuticiones en láminas de acero para maximizar resistencia de losas compuestas. Revista Ingeniería de Construcción, Vol 22, Nro 3.
- Mccarthy C.T., M. A. Mccarthy, et al. (2005), Experiences with modeling friction in composite bolted joints. Journal of composite materials, Journal of composite materials. Vol 39. 28p. Irlanda.
- Recarey C. (1999), Modelación del terreno y las estructuras en el dominio del tiempo. Tesis Doctoral. Santa Clara, Cuba, UCLV. Tutor: Quevedo, G.
- Shuurman R.G., Stark J.W.B (2000), Longitudinal Shear Resistance of Composite Slabs. A New Model. Engineering Foundation Conference on Composite Construction in Steel and Concrete IV. Netherland
- Skuber P. (2007), Nova Trimo profilirana plocevina Porocilo o testih na malih preizkusancih. Ljubljana, Slovenija, Univerza v Ljubljana.
- Skuber P., Beg D. y Rugelj T. (2008), Nova profilirana plocevina za sovprezne stropove. Ljubljana, Slovenija, Univerza v Ljubljana.
- Veljkovic M. (1998), Influence of Load Arrangement on Composite Slab Behaviour and Recommendations for Design. Journal of Constructional Steel Research 45(2): 149-178, Netherland
- Widjaja B.R. (1997), Analysis and Design of Steel Deck- Concrete Composite Slabs. Doctoral Thesis. Virginia Technology Institute. EE.UU.
- Zienkiewicz O. C. y Taylor R. L. (2004), El método de los Elementos Finitos, Barcelona, España, CIMNE. 794p.